第 39 卷 第 5 期
2022 年 10 月
应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 39 No. 5
Oct. 2022

文章编号:1000-4939(2022)05-0807-09

多边形板高频振动的能量虚源法研究

代成浩,钟强,陈海波

(中国科学院材料力学行为与设计重点实验室,中国科学技术大学近代力学系,230026 合肥)

摘 要:本研究的目的是将室内声学中的虚源法引入高频横向点激励作用下多边形板的能量辐射传递模型中,以预测结构弯曲振动的能量响应,其核心是如何构建多边形板的虚源云场。在多边形板的能量辐射传递模型框架中,以实源的镜像虚源替代结构的边界,以此来表示边界处能量的连续反射。基于直接场的能量密度和功率流强度核函数,结构内部任意一点的能量可由实源产生的能量和无限多的镜像源产生的能量叠加得到。对直角三角形板和方形板求解,获得了它们的能量密度与功率流强度分布特征。数值算例结果与能量辐射传递法以及解析解对比,验证了模型的准确性。最后讨论了阻尼、频率和虚源的阶数对计算结果收敛性的影响。
关键词:虚源法;多边形板;虚源云场;能量辐射传递法;能量密度;功率流
中图分类号:TB533 **文献标志码:**A **DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2022.05.001

Research on energy image source method for high frequency vibration of polygonal plate

DAI Chenghao, ZHONG Qiang, CHEN Haibo

(CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials,
Department of Modern Mechanics of University of Science and Technology of China, 230026 Hefei, China)

Abstract: The purpose of this study is to introduce the image source method in room acoustics into the radiative energy transfer model of a polygonal plate under high frequency transverse point excitation to predict its energy response of structural bending vibrations. The key treatment is how to construct the image source cloud field of the polygonal plate. In the framework of the radiative energy transfer model for the polygonal plate, the mirror image of the real source is used to replace the boundary of the structure so as to represent the continuous reflection of energy at the boundary. Based on the energy density and power flow intensity kernel functions of the direct field, the energy at any point inside the structure can be obtained by superposition of the energy generated by the real source and the energy generated by an infinite number of image sources. By solving the right triangular plate and rectangular plate, we can obtain their distribution characteristics of energy density and power flow intensity. Numerical results are compared with those solved by the radiative energy transfer method and the analytical solutions to verify the accuracy of the proposed model. Finally, the effects of damping, frequency and order of image sources on the convergence of the

收稿日期:2022-04-22 **修回日期:**2022-06-23
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11772322);中国科学院战略性先导科技专项(B 类)资助项目(No. XDB22040502)
通信作者:陈海波,教授。E-mail: hbchen@ustc.edu.cn
引用格式:代成浩,钟强,陈海波. 多边形板高频振动的能量虚源法研究[J]. 应用力学学报,2022,39(5):807-815.
DAI Chenghao, ZHONG Qiang, CHEN Haibo. Research on energy image source method for high frequency vibration of polygonal plate[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(5):807-815.

computation results are discussed.

Key words: image source method; polygonal plate; image source cloud field; radiative energy transfer method; energy density; power flow

大量的单元数目和对不确定性的高敏感度是使用有限元(finite element method, FEM)[1]、边界元(boundary element method, BEM)[2]等确定性分析方法求解高频问题时的主要限制，为克服这些限制，若干能量法已被提出并在高频分析领域成为了主流。其中，最常用的方法是统计能量分析(statistical energy anlysis, SEA)[3-5]，它假设能量场为扩散场，但只能预测系统的平均能量响应。为此，Le Bot 在 SEA 的基础上，提出了能够预测结构内部能量密度分布的能量辐射传递法(radiative energy transfer method, RETM)[6-7]。该方法源于声学中的射线追踪方法[8]，在二维和三维系统中振动场的形式分别为柱面波和球面波，结构内部任意一点的能量由实源辐射的直接场能量和边界虚源辐射的反射场能量叠加得到，在高阻尼下的混响场仍具有较好的分析精度[9]。由于振动传导法以及相应的能量有限元法(energy finite element method, EFEM)假设振动场由平面波叠加而成[10-14]，因此，在二维或三维系统中，RETM 的求解精度要高于振动传导法[15-17]。

虚源法作为一种预测结构高频振动响应的方法多年来广受关注[18-19]。最早，虚源法主要被应用于室内声学领域[20-22]，其特点是以实源在域外的镜像虚源替代结构的边界，基于波的传播规律进行计算，不会受到常规数值分析中单元和模态数的限制。1995 年，Gunda 等[23]采用虚源法得到了简支梁和矩形板的振动响应。2009 年，Cuenca 等[24]应用虚源法得到了任意简支多边形板的精确格林函数，有效的预测了多边形板的中高频振动响应。2012 年，Cuenca 等[25]同样应用虚源法得到任意边界条件下多边形板的格林函数，并与有限元方法结果进行了对比。

能量辐射传递法(RETM)是通过定义在边界的虚源来描述能量的反射，它已经被证明在均匀各向同性介质的同一波场中满足射线的镜面反射规律[26-27]，因此，RETM 在理论上能够通过虚源法来实现。虚源法不需要求解边界虚源积分方程，虚源的振幅为实源振幅与边界反射系数的乘积，只需对所有虚源的影响进行叠加，即可获得结构内部的能量响应。

本研究通过建立多边形板的域外虚源云场，采用镜面反射来描述能量在边界处的传递特性，将虚源法推广到多边形板的能量辐射传递模型中。数值算例以三角形板和矩形板为例，获得了横向点激励下结构的能量密度与功率流强度。最后讨论了不同阻尼和不同虚源阶数下，基于能量的虚源法与能量辐射传递法结果的误差随频率的变化。

1 板的振动模型

1.1 板中的波传播

横向简谐点激励作用下的多边形板模型中，板的振动主要为横向的弯曲振动。基于薄板假设的多边形板的控制方程如式(1)所示[28-29]。

$$D\nabla^4 w+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F\mathrm{e}^{i\omega t}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\quad(1)$$

式中：$w=w(x,y)$ 为横向位移；$D=Eh^3/(12(1-\mu^2))$ 为弯曲刚度；ρ_0 为密度；h 为厚度；F 是频率为 ω 简谐激励的振幅；δ 为 Dirac delta 函数。假设上述控制方程的行波解为 $w=A\mathrm{e}^{-i(k_b\cos\theta x+k_b\sin\theta y)+i\omega t}$，代入式(1)即可获得板弯曲振动的频散方程为

$$Dk_b^4-\rho_0 h\omega^2=0\quad(2)$$

通过式(2)获得弯曲波数 $k_b=(\rho_0 h\omega^2/D)^{1/4}$，弯曲波群速度 $c_{gb}=2(D\omega^2/(\rho_0 h))^{1/4}$。

1.2 能量密度与功率流强度

根据参考文献[24]，板内任意一点的振动由其所镜像的虚源云场的所有虚源的影响叠加得到，即任意一点的振动可由式(3)表示为

$$w(x,y;x_0,y_0)=\frac{1}{\lambda_x\lambda_y}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\varepsilon(x,y;x_0,y_0)]_{(k_m,k_n)}\times[w_\infty(x,y;0,0)]_{(k_m,k_n)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_m x+k_n y)}\quad(3)$$

式中：λ_x、λ_y 为周期性虚源云场的单元场尺寸；ε 为描述虚源云场单元的函数；w_∞ 为无限板的位移解；$k_m=2m\pi/\lambda_x$，$k_n=2n\pi/\lambda_y$。结合特定几何形状板，式(3)等价于模态叠加。直角三角形板和矩形板的位移表达式如式(4)和式(5)所示。

$$w(x,y;x_0,y_0)=\frac{4}{L_xL_y}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\sin(k_m x_0)\sin(k_n y_0)}{D((k_m^2+k_n^2)^2-k_b^4)}-\frac{\sin(k_m(L_x-y_0))\sin(k_n(L_y-x_0))}{D((k_m^2+k_n^2)^2-k_b^4)}\right]\sin(k_m x)\sin(k_n y)\quad(4)$$

$$w(x,y;x_0,y_0)=\frac{4}{L_xL_y}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(k_mx_0)\sin(k_ny_0)\sin(k_mx)\sin(k_ny)}{D((k_m^2+k_n^2)^2-k_b^4)} \tag{5}$$

因此，板内弯曲振动的能量密度如式(6)所示[30]。

$$W=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}+2(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y}\right)+m\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial w^*}{\partial t}\right] \tag{6}$$

功率流强度与能量密度比值为群速度，如式(7)所示。

$$I=c_gW \tag{7}$$

2 能量辐射传递模型

2.1 虚源云场

多边形板的虚源云场坐标主要是实源以结构边界为镜面获得的。虚源法是以波传播法为基础的分析方法，通过确定激励点与接收点之间的传播路径，预测结构的振动响应。

图 1 所示为多边形板的一阶虚源云场，S_0 为作用在板内的实源。S_1^1、S_2^1、S_3^1 是 S_0 分别通过边界 B_1、B_2、B_3 一次镜像的虚源。

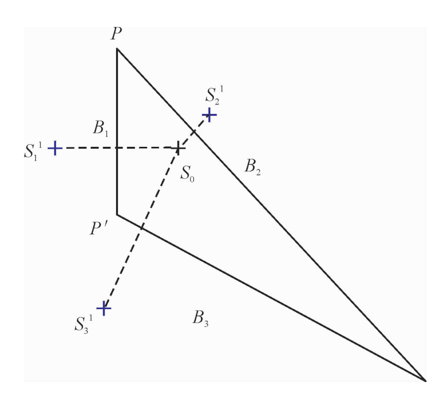


图 1　多边形板一阶虚源云场

Fig. 1　First-order image source cloud field of polygonal plate

图 2 为多边形板二阶虚源云场，图中 S_i^n 为经过 n 次镜像的第 i 个虚源。S_1^1 为 S_0 以 B_1 为镜面的一阶虚源，同理 S_2^1 和 S_3^1 为 S_0 以边界 B_2 和 B_3 为镜像所镜像的一阶虚源。二阶虚源则为一阶镜像虚源以其边界为镜面获得。

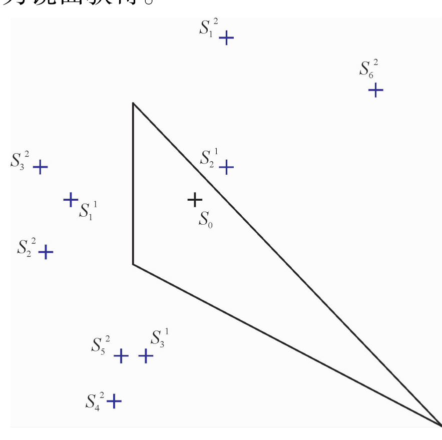


图 2　多边形板二阶虚源云场

Fig. 2　Second-order image source cloud field of polygonal plate

镜像的虚源坐标可由式(8)获得，即

$$S_j^{n+1}=-S_i^n+2P+2\frac{(S_i^n-P)\cdot(P'-P)}{|P'-P|}\cdot\frac{(P'-P)}{|P'-P|} \tag{8}$$

其中：S_j^{n+1} 为点 S_i^n 镜像的虚源；P' 和 P 分别为边界的左右两端点。

2.2 能量辐射传递模型

在传统的二维结构的能量辐射传递模型中，结构任意一点的能量为实源辐射的直接场能量与边界反射场能量的叠加，通过在边界处划分虚源来描述能量的反射。图 3 为点激励作用下多边形板的能量辐射传递模型示意图。

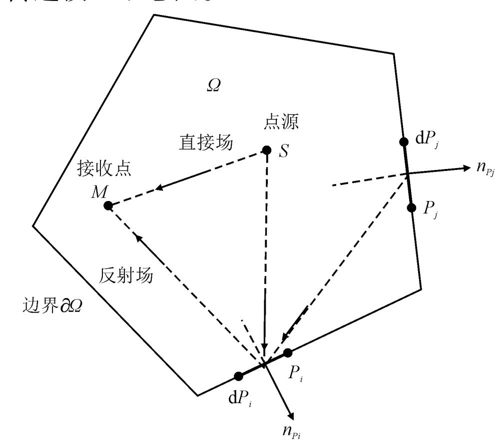


图 3　多边形板能量辐射传递模型

Fig. 3　Radiative energy transfer model for polygonal plate

结构的能量密度和功率流强度由式(9)所示的积分方程获得，即

$$\left.\begin{aligned}W_\alpha(M)&=\int_\Omega\rho(S)G_\alpha(S,M)\mathrm{d}S+\int_{\partial\Omega}\sigma_\alpha(P)G_\alpha(P,M)\cos\theta_P^M\mathrm{d}P\\ \boldsymbol{I}_\alpha(M)&=\int_\Omega\rho(S)\boldsymbol{H}_\alpha(S,M)\mathrm{d}S+\int_{\partial\Omega}\sigma_\alpha(P)\boldsymbol{H}_\alpha(P,M)\cos\theta_P^M\mathrm{d}P\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中:α 为波型;ρ 为输入功率;σ 为边界虚源强度。G_α 和 $\boldsymbol{H}_\alpha$ 为能量密度和功率流强度的核函数[31],且

$$\left.\begin{aligned} G_\alpha(S,M) &= \frac{\mathrm{e}^{-mr}}{2\pi c_{g\alpha} r_{SM}} \\ \boldsymbol{H}_\alpha(S,M) &= \frac{\mathrm{e}^{-mr}}{2\pi r_{SM}} \boldsymbol{u}(\theta) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中:$m=\eta\omega/c_{g\alpha}$ 为能量衰减系数,$\boldsymbol{u}(\theta)$ 为方向向量。σ 可由求解边界虚源功率流平衡方程获得,如式(11)所示。

$$\frac{\sigma_\alpha(P_i)}{\pi} = \left[\int_\Omega R_{\beta\alpha}\rho(S)\boldsymbol{H}_\beta(S,P_i)\mathrm{d}S + \int R_{\beta\alpha}\sigma(P_j)\boldsymbol{H}_\beta(P_j,P_i)\cos\theta_{P_j}^{P_i}\mathrm{d}P_j\right]\boldsymbol{n}_{P_i} \tag{11}$$

将虚源法引入到 RETM,可由域外的虚源替代传统 RETM 定义在边界的虚源。结构内部任意一点的能量为域外虚源的辐射能量与实源辐射能量叠加。此前,虚源法预测板的振动是从位移的角度获得振动的格林函数解[24],本研究从能量的角度,使用虚源法获得结构高频振动的能量响应,如式(12)所示。

$$W_\alpha(M) = P_{in}\left[G_\alpha(S_0,M) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{l_n} R_{\beta\alpha}G_\alpha(S_i^n,M)\right] \tag{12}$$

式中:W 为能量密度;P_{in} 为输入功率;n 为虚源的阶数;l_n 为每一阶虚源的个数;$R_{\beta\alpha}$ 为边界能量反射系数。功率流强度如式(13)所示。

$$\boldsymbol{I}_\alpha(M) = P_{in}\left[H_\alpha(S_0,M)\boldsymbol{u}(\theta_{S_0}^M) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{l_n} R_{\beta\alpha}H_\alpha(S_i^n,M)\boldsymbol{u}(\theta_{S_i^n}^M)\right] \tag{13}$$

虚源辐射能量的范围是有限的,如图4所示,每一个虚源所辐射的区域是其与镜像边界两端连线中间区域,超过此区域,则能量不能在此边界反射到区域外的接收点。当虚源重合时,虚源的辐射区域不同,因此只计算一次即可。

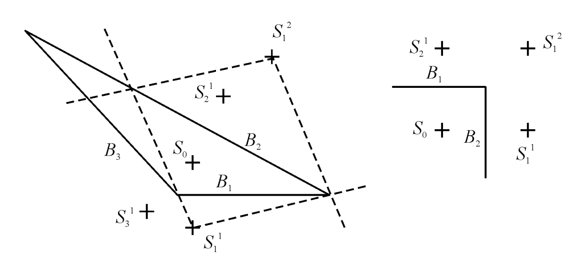


图4 虚源辐射的有效区域

Fig. 4 The effective region of image sour ceradiation

3 数值模拟验证与讨论

3.1 能量密度及功率流强度

3.1.1 直角三角形板

以直角边分别为 1 m×1 m 的三角形铝板为例,厚度为 1 mm,四周简支,其材料参数如表1所示。实源以边界镜像的前五阶虚源云如图5所示,在 $x_0=0.25$ m,$y_0=0.25$ m 处作用 $F=1$N 的横向点激励,频率为 8 000 Hz。

表1 材料参数

Tab. 1 Material parameters

材料	弹性模量 E/GPa	泊松比 u	密度 ρ/(kg·m^{-3})
铝	71	0.3	2 700

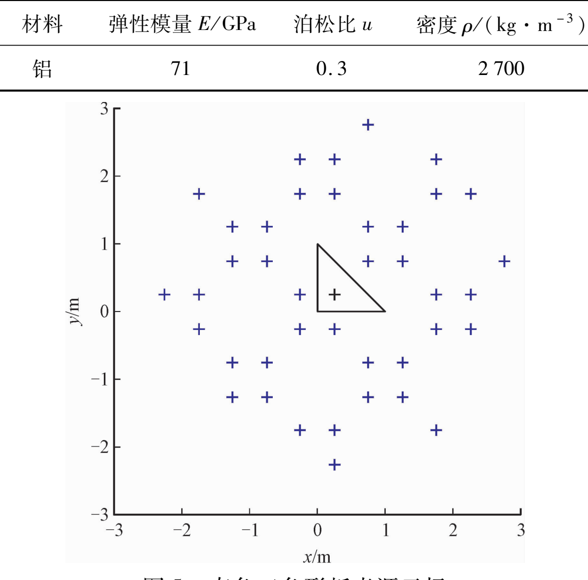


图5 直角三角形板虚源云场

Fig. 5 Image source cloud field of right triangle plate

图6为不同阻尼下,由式(12)得到的能量虚源法结果与式(4)解析解的能量密度(参考值 10^{-12}J/m^2)的对比。从图中可以看出,两种阻尼下能量虚源法与解析解吻合较好,阻尼越大能量衰减越快。解析解中靠近边界处的能量密度振荡较大,这是由于反射场与直接场的干涉引起的。能量虚源法忽略了波与波之间的干涉,所以能量密度的分布较为平滑。

图7和图8分别为2种阻尼下,能量虚源法与解析解的功率流强度和能量等值线结果的对比。从图中可以看出,阻尼 0.1 和 0.05 下的能量虚源法与解析解的能量流方向基本一致,能量等值线的分布也比较吻合。板的振动能量是由点激励引起并向四周流动。从能量的流线方向和等值线的分布可以看出,在激励点附近,板的能量主要受直接场控制,越靠近边界,反射场的影响越大。由于波的干涉,解析解的能量在靠近边界的位置,振荡明显增大,而能量

虚源法的结果则相对平滑一些。

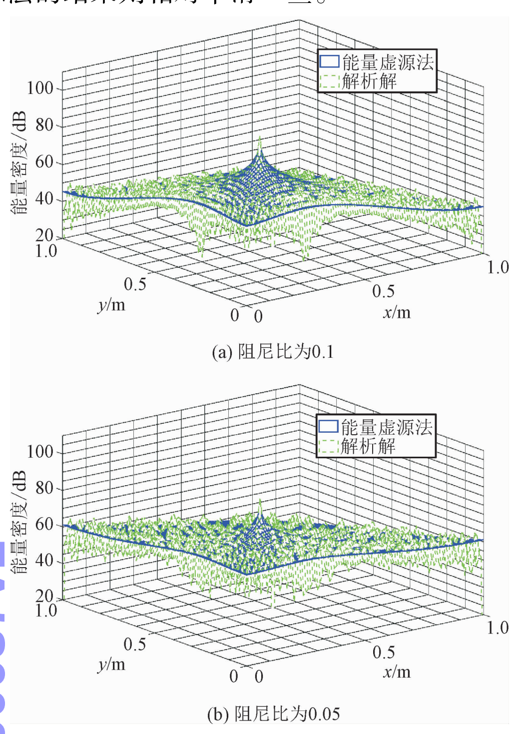


图 6　直角三角形板的能量分布

Fig. 6　Energy distribution of right triangle plate

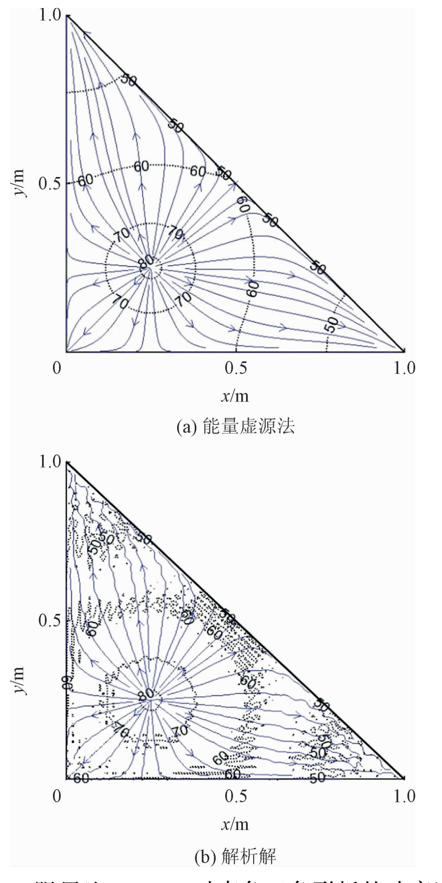


图 7　阻尼比 $\eta = 0.1$ 时直角三角形板的功率流

Fig. 7　Power flows of right triangle plate when damping ratio $\eta = 0.1$

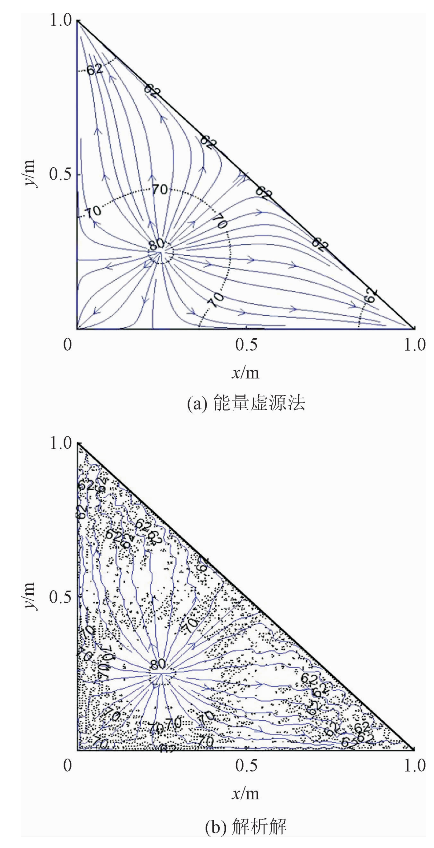


图 8　阻尼比 $\eta = 0.05$ 时直角三角形板的功率流

Fig. 8　Power flows of right triangle plate when damping ratio $\eta = 0.05$

3.1.2　方形板

本节以长宽高分别为 1 m × 1 m × 1 mm 的方形铝板为例，四周简支，其材料参数如表 1 所示。在板中心处作用振幅 $F = 1\mathrm{N}$，频率为 8 000 Hz 的横向点激励。研究不同阻尼下，方形板能量密度与功率流强度分布特征，并与解析解进行对比验证引入虚源法后的结构能量辐射传递模型的准确性。

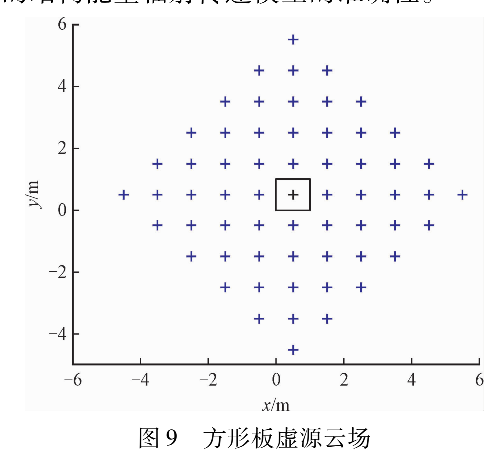


图 9　方形板虚源云场

Fig. 9　Image source cloud field of square plate

图 9 为方形板前五阶虚源云场。图 10 为采用前五阶虚源得到的能量虚源法结果与解析解的能量

密度结果的对比。从图中可以看出,依据方形板的前五阶虚源得到的能量响应与解析解吻合较好。当阻尼为0.1时,能量由激励点处向四周快速衰减。而阻尼为0.05时,能量的衰减速度就相对缓慢一些。

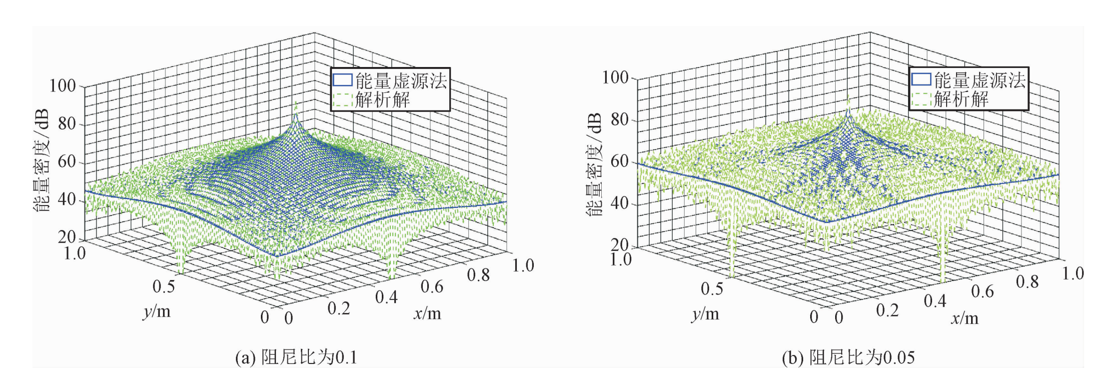


图10 方形板的能量分布

Fig. 10 Energy distribution of square plate

图11和图12为方形板的功率流强度分布。从图中可以看出,能量虚源法与解析解的能量流线的方向和等势线基本一致。与直角三角形板的能量响应结果有着同样的现象,由于忽略了波和波之间的相互干涉,因此能量虚源法的结果较为平滑。而解析结果考虑了直接场和反射场之间的干涉效应,因此能量在边界处的振荡较为明显。由于方形板的结构具有对称性,激励点取在板的中心,因此能量密度的结果也呈现出对称现象。

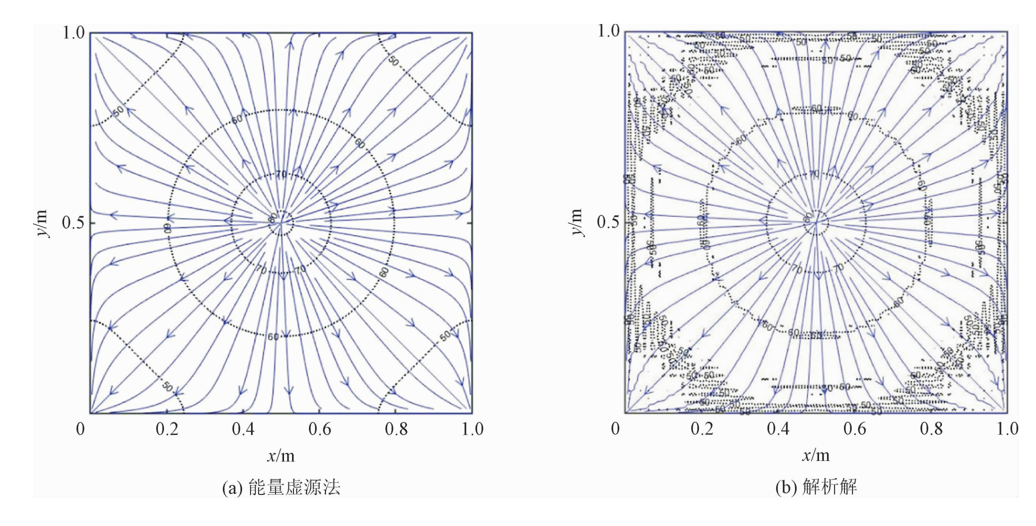


图11 阻尼比 $\eta=0.1$ 时方形板的功率流强度

Fig. 11 Power flows of square plate when damping ratio $\eta=0.1$

3.2 计算收敛性分析

本节以上节方形板模型为例,讨论不同阻尼下的频率和虚源阶数对局部能量响应与平均能量响应收敛性的影响。图13为(0.8 m,0.8 m)和(0.4 m,0.4 m)处的局部能量响应随频率的变化。从图中可以看出,当激励点取在板中间时,随着频率的增加,两种阻尼下的能量虚源法结果与RETM解基本吻合,且均逐渐收敛于解析解。由于(0.8 m,0.8 m)点处更接近边界,其解析解的振荡幅度相对大些。随着频率的增加,由激励位置向边界的能量衰减程度逐渐增大,阻尼越大,此衰减幅度也越大。

为体现虚源的数量对结果收敛性的影响,以RETM的结果为参考值,分析能量虚源法与RETM的能量结果的偏差随频率和虚源阶数的变化。图14为采用能量虚源法与传统的RETM计算的(0.4 m,0.4 m)处能量响应的偏差分析结果。从图中可以看出随着频率的增加,能量虚源法逐渐收敛于RETM解。当参与计算的虚源阶数越多时,收敛越快。当虚源阶数一定时,阻尼越大,结果随频率的

增加,收敛速度越快。当频率一定,阻尼越大时,收敛于 RETM 的结果值所需要参与计算的虚源数越少。因此,当激励频率和阻尼均较大时,采用能量虚源法获得结构精确的能量响应所需要的虚源数数量相对较少。

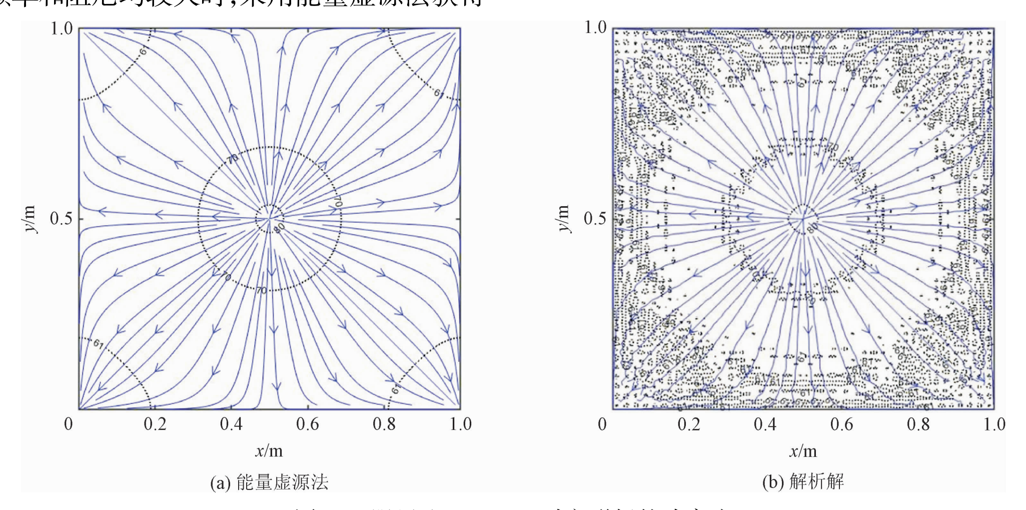


图 12　阻尼比 $\eta=0.05$ 时方形板的功率流

Fig. 12　Power flows of square plate when damping ratio $\eta=0.05$

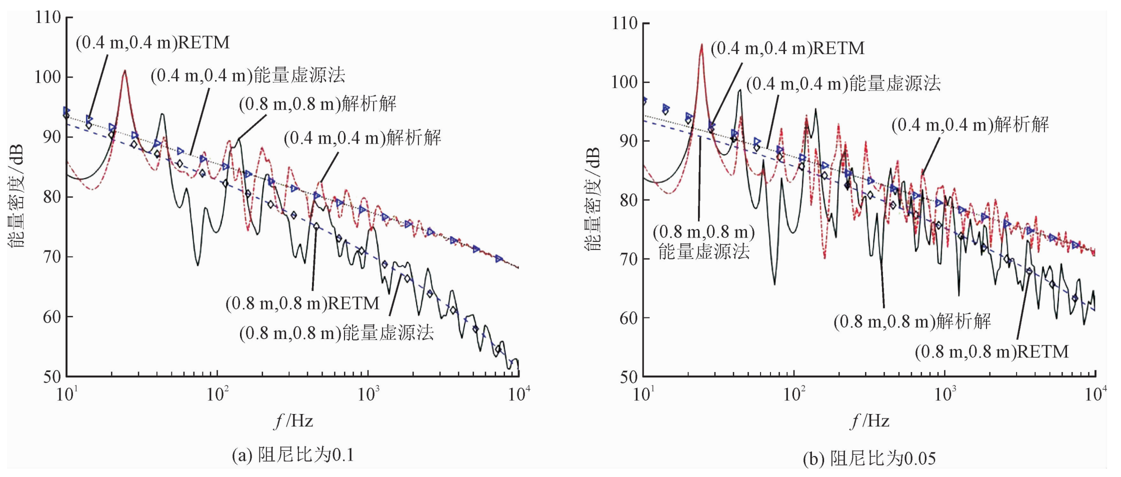


图 13　随频率变化的局部能量响应

Fig. 13　Local energy response that varies with frequency

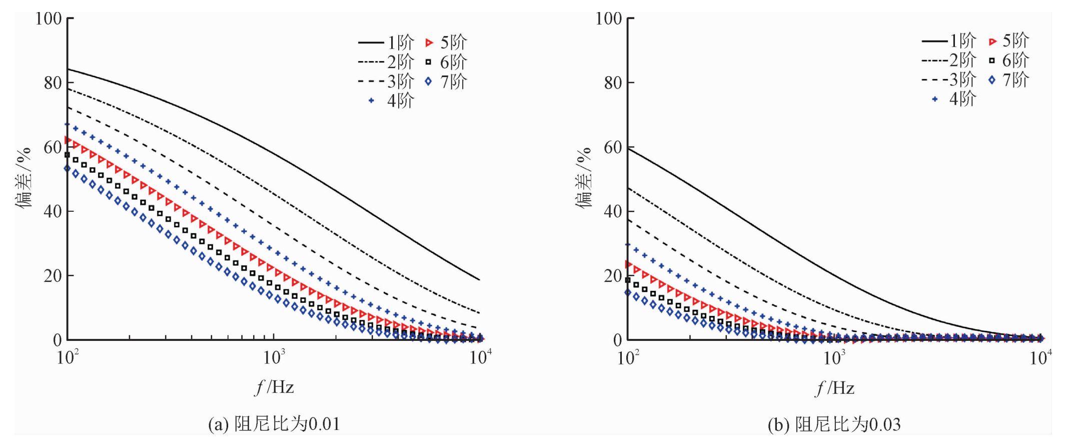


图 14　(0.4 m,0.4 m)处能量虚源法与 RETM 局部能量响应偏差分析

Fig. 14　Analysis of local energy response deviation between image source method and RETM at (0.4 m,0.4 m)

图 15 为采用能量虚源法与 RETM 计算得到的平均能量响应的误差随频率变化的趋势。从图中可

以看出平均能量响应变化的趋势与图 14 中的局部能量响应偏差趋势基本一致。当频率一定时，参与计算的虚源数量越多，结果越精确，且当虚源数量增加到一定程度时，结果逐渐收敛。当能量虚源法的结果收敛时，与 RETM 的平均能量响应还是存在略微的偏差。

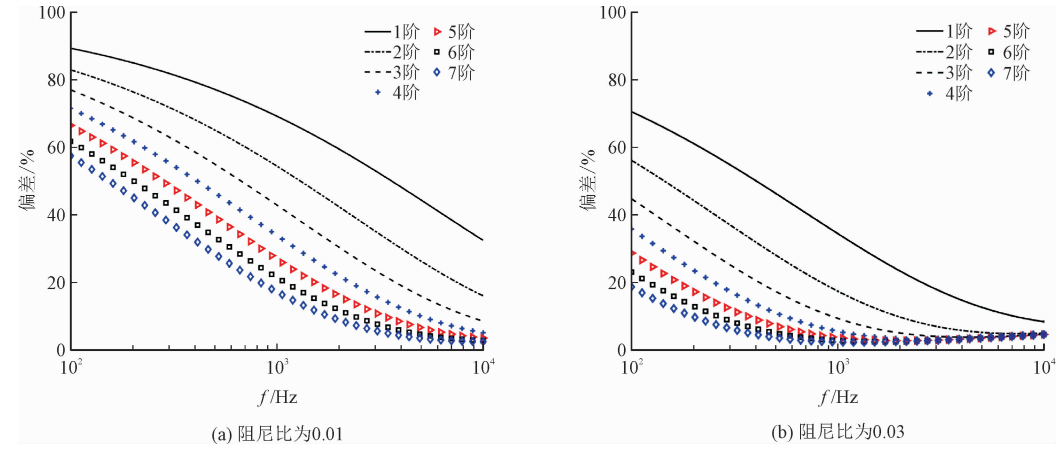
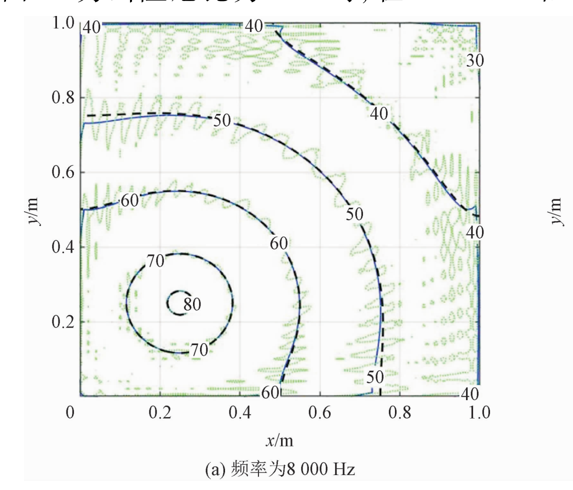


图 15　平均能量响应偏差分析

Fig. 15　Average energy response deviation analysis

由于能量虚源法采用的是镜面反射模型，而传统的 RETM 边界处采用漫反射模型描述边界处能量的反射，为体现反射模型的影响，在方形板的(0.25 m, 0.25 m)处作用一幅值为 1 的简谐点激励，结构阻尼为 0.1。

图 16 为当阻尼比为 0.1 时，在 8 000 Hz 和 12 000 Hz的频率下采用 RETM、能量虚源法和解析方法获得的方形板的能量等势线结果对比。从图中可以看出在不同的频率下，采用能量虚源法得到的能量分布结果相较于 RETM 与解析解更加吻合一些。这是由于采用镜面反射比漫反射更符合真实波场的反射规律。



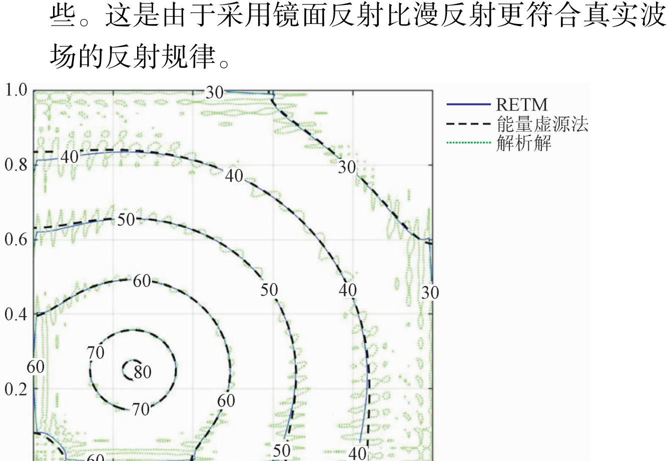


图 16　能量等势线

Fig. 16　Energy contours

4　结　论

本研究以多边形板为研究对象，建立了通过虚源法实现的多边形板能量辐射传递模型。以直角三角形板和方形板为例，建立了其虚源云场，获得模型在横向点激励作用下的弯曲波能量密度和功率流强度分布特征。在不同的阻尼下，数值结果与解析解和传统的 RETM 结果进行了对比，验证了模型的准确性并分析了频率对局部能量响应的影响。最后以方形板为例，讨论了能量虚源法与 RETM 的偏差随频率、阻尼及虚源的阶数的变化，所得结论如下。

1) 直角三角形板和方形板的能量密度与解析解在不同阻尼情况下均吻合较好，功率流强度分布特征也与解析解较为一致。

2) 能量虚源法的结果与解析解随着频率的增加

吻合程度越好。随着频率的增加,其计算结果逐渐收敛于 RETM 解,当参与计算的虚源阶数越多时,收敛越快。阻尼越大时,收敛于 RETM 解所需要参与计算的虚源数越少。

3)能量虚源法相比于传统的 RETM 与解析解更为吻合,但与 RETM 的偏差并不大,属于可接受范围。

参考文献:

[1] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2003.

[2] 姚振汉,王海涛. 边界元法[M]. 北京:高等教育出版社,2010.

[3] LE BOT A. Foundations of statistical energy analysis in vibroacoustics[M]. Oxford:Oxford University Press,2015.

[4] FORSSEN J,TOBER S,CORAKCI A C,et al. Modelling the interior sound field of a railway vehicle using statistical energy analysis[J]. Applied acoustics,2012,73(4):307-311.

[5] CULLA A,D'AMBROGIO W,FREGOLENT A,et al. Vibroacoustic optimization using a statistical energy analysis model[J]. Journal of sound and vibration,2016,375:102-114.

[6] LE BOT A. A vibroacoustic model for high frequency analysis[J]. Journal of sound and vibration,1998,211(4):537-554.

[7] LE BOT A,SADOULETREBOUL E. High frequency vibroacoustics:A radiative transfer equation and radiosity based approach[J]. Wave motion,2014,51(4):598-605.

[8] Chae K S,Ih J G. Prediction of vibrational energy distribution in the thin plate at high-frequency bands by using the ray tracing method[J]. Journal of sound and vibration,2001,240(2):263-292.

[9] LE BOT A. Energy transfer for high frequencies in built-up structures[J]. Journal of sound and vibration,2002,250(2):247-275.

[10] LANGLEY R S. On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components[J]. Journal of sound and vibration,1995,182(4):637-657.

[11] 周红卫. 高频声振耦合能量有限元若干问题研究[D]. 合肥:中国科学技术大学,2015.

[12] KIM H Y,KANG Y J. Energy flow analysis of equivalent fluid models for porous media[J]. The Journal of the Acoustical Society of America,2021,150(4):2782-2797.

[13] WANG D,XIE M,LI Y. High-frequency dynamic analysis of plates in thermal environments based on energy finite element method[J]. Shock and vibration,2015,2015:1-14.

[14] 江民圣. 任意板及耦合结构能量传递的功率流有限元分析[D]. 济南:山东大学,2015.

[15] LE BOT A. Comparison of vibrational conductivity and radiative energy transfer methods[J]. Journal of sound and vibration,2004,283(1):135-151.

[16] ZHONG Q,CHEN H,LE BOT A. Radiative energy transfer model for finite anisotropic plates[J]. Journal of sound and vibration,2021,497(4):115947.

[17] 王幸. 基于能量辐射传递法的结构高频振动响应分析[D]. 北京:中国科学技术大学,2021.

[18] LANGLEY A J,TAYLOR P H. Chladni patterns in random vibration[J]. International journal of engineering science,1979,17(9):1039-1047.

[19] BRUNSKOG J. Image solution for clamped finite beams[J]. Journal of sound and vibration,2005,287(45):1057-1064.

[20] MECHEL F P. Improved mirror source method in roomacoustics[J]. Journal of sound and vibration,2002,256(5):873-940.

[21] TSUNOKUNI I,KUROKAWA K,MATSUHASHI H,et al. Spatial extrapolation of early room impulse responses in local area using sparse equivalent sources and image source method[J]. Applied acoustics,2021,179:108027.

[22] PANAHI E,YOUNESIAN D. Acoustic performance enhancement in a railway passenger carriage using hybrid ray-tracing and image-source method[J]. Applied acoustics,2020,170(4):107527.

[23] GUNDA R,VIJAYAKAR S M,SINGH R. Method of images for the harmonic response of beams and rectangular plates[J]. Journal of sound and vibration,1995,185(5):791-808.

[24] CUENCA J,GAUTIER F,SIMON L. The image source method for calculating the vibrations of simply supported convex polygonal plates[J]. Journal of sound and vibration,2009,322(4/5):1048-1069.

[25] CUENCA J,GAUTIER F,SIMON L. Harmonic Green's functions for flexural waves in semi-infinite plates with arbitrary boundary conditions and high-frequency approximation for convex polygonal plates[J]. Journal of sound and vibration,2012,331(6):1426-1440.

[26] COTONI V,LE BOT A. Specular and diffuse reflections of rays in coupled thin plates at high frequencies[J]. Journal of sound and vibration,2003,265(1):23-41.

[27] LE BOT A. A functional equation for the specular reflection of rays[J]. The Journal of the Acoustical Society of America,2002,112(4):1276-1287.

[28] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京:高等教育出版社,2015.

[29] 李翱. 耦合结构的能量传递特性研究[D]. 合肥:中国科学技术大学,2021.

[30] 钟强. 结构高频声振统计特性及能量辐射传递模型研究[D]. 合肥:中国科学技术大学,2021.

[31] COTONI V,LE BOT A,JEZEQUEL L. High-frequency radiation of l-shaped plates by a local energy flow approach[J]. Journal of sound and vibration,2002,250(3):431-444.

（编辑　黄崇亚　史淑英）